

## Zur Ermittlung der mechanischen Hysterese rheologischer Körper

J. BETTEN

Institut für Werkstoffkunde an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. 27 a, 718—719 [1972]; eingegangen am 5. Februar 1972)

In der vorliegenden Untersuchung werden die Grundgleichungen zur analytischen Bestimmung der mechanischen Hysterese rheologischer Körper zusammengestellt. Dabei wird das Boltzmannsche Superpositionsprinzip vorausgesetzt. Als Beispiel wird die mechanische Hysterese für den Kelvin-Körper hergeleitet, die sich mit der Ersatzhysterese eines linearierten Werkstoffschwingers deckt. Aus der Gleichung der Hysterese erhält man durch Hauptachsentransformation schließlich einen Wert für die Werkstoffdämpfung.

### Einleitung

Zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens rheologischer Körper ist es zweckmäßig, ihre charakteristischen Hysteresisschleifen im  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Koordinatensystem experimentell aufzunehmen oder analytisch zu bestimmen. Insbesondere gibt der Inhalt der Hysteresisschleife die je Belastungszyklus zerstreute Energie wieder. Über einen Bezugswert erhält man daraus die spezifische Dämpfung, die man auch mit Werkstoffdämpfung bezeichnet. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man unmittelbar die mechanische Hysterese rheologischer Körper analytisch bestimmen kann.

### Grundgleichungen

Als Kriechfunktion  $\kappa$  im einachsigen Vergleichszustand wird definiert:

$$E \varepsilon(t) / \sigma_0 = \kappa(t; \sigma_0, \text{Stoffwerte}). \quad (1)$$

Darin ist  $\varepsilon(t)$  der zeitliche Dehnungsverlauf bei konstanter Belastung durch  $\sigma_0$ . Entsprechend läßt sich die Relaxation durch die Definition einer Relaxationsfunktion  $\varrho$  charakterisieren:

$$\sigma(t) / E \varepsilon_0 = \varrho(t; \varepsilon_0, \text{Stoffwerte}) \quad (2)$$

( $E$  Elastizitätsmodul).

In Tab. 1 sind Beispiele für Kriech- und Relaxationsfunktionen angegeben.

Tab. 1. Kriech- und Relaxationsfunktionen.  
 $G$  Gleitmodul;  $\eta$  dynamische Viskosität.

Körper	Kriechfunktion $\kappa = \kappa(t)$	Relaxationsfunktion $\varrho = \varrho(t)$
Kelvin	$1 - \exp\{(-G/\eta) t\}$	$1 - (G/\eta) t$
Maxwell	$1 + (G/\eta) t$	$\exp\{(-G/\eta) t\}$

Ist die Spannung im Gegensatz zu Gl. (1) bzw. die Verzerrung im Gegensatz zu Gl. (2) eine kontinuierliche Funktion der Zeit, so erhält man aus dem Boltzmannschen Superpositionsprinzip die allgemeinen Be-

ziehungen:

$$E \varepsilon(t) = \sigma(t) \kappa(0) - \int_{-\infty}^t \sigma(t^*) \frac{\partial \kappa(t-t^*)}{\partial t^*} dt^* \quad (3)$$

bzw.

$$\frac{\sigma(t)}{E} = \varepsilon(t) \varrho(0) - \int_{-\infty}^t \varepsilon(t^*) \frac{\partial \varrho(t-t^*)}{\partial t^*} dt^*. \quad (4)$$

### Mechanische Hysterese des Kelvin-Körpers als Beispiel

Aus Tab. 1 entnimmt man die Kriechfunktion des Kelvin-Körpers:

$$\kappa = \kappa(t; \tau) = 1 - e^{-t/\tau}; \quad \tau = \eta/G. \quad (5)$$

Der Kelvin-Körper unterliege einer Belastung infolge periodischer Erregung mit der Erregerfrequenz  $\Omega$ :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cos \Omega t \quad (6a)$$

bzw. in komplexer Darstellung:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot \operatorname{Re}(e^{i\Omega t}). \quad (6b)$$

Mit Gl. (5) und (6b) erhält man aus der allgemeinen Form (3):

$$E \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^t e^{i\Omega t^*} e^{t^*/\tau} dt^* \right\} \quad (7a)$$

oder nach Integration und Trennung von Real- und Imaginärteil:

$$E \varepsilon(t) = \frac{1}{1 + \Omega^2 \tau^2} (\sigma_0 \cos \Omega t + \Omega \tau \sigma_0 \sin \Omega t). \quad (7b)$$

Entsprechend der Störfunktion gemäß Gl. (6a) kann als Lösung angesetzt werden:

$$E \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{1 + \Omega^2 \tau^2} \cos(\Omega t - \alpha) \quad (8)$$

mit  $\alpha$  als Phasenwinkel zwischen Erregerspannung  $\sigma$  und Verzerrungsform  $\varepsilon$ . Wendet man auf Gl. (8) das Additionstheorem an, so erhält man durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (7b) unmittelbar den Phasenwinkel  $\alpha$  zu

$$\alpha = \arctan \Omega \tau = \arctan \Omega (\eta/G). \quad (9)$$

Der Phasenwinkel  $\alpha$  wird häufig auch mit „Verlustwinkel“ bezeichnet<sup>1</sup>. Die Amplitude der Schwingungsform ergibt sich durch Extremwertbildung ( $\dot{\varepsilon} = 0$ ) aus Gl. (7b) zu:

$$E \varepsilon_a = \sigma_0 / \sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}. \quad (10)$$

Um die Gleichung der Hysterese in  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Koordinaten zu erhalten, ersetzt man in Gl. (7b) die trigonometrischen Ausdrücke durch  $\sigma$  gemäß Gleichung (6a). Unter Berücksichtigung von Gl. (10) findet man schließlich als Ergebnis die quadratische Form:

$$(1 + \Omega^2 \tau^2) \varepsilon^2 - 2 \varepsilon (\sigma/E) + (\sigma/E)^2 - \Omega^2 \tau^2 \varepsilon_a^2 = 0. \quad (11)$$

Gleichung (11) stellt eine Ellipse dar. Je nach Werkstoff können experimentell aufgenommene Hysteresisschleifen mehr oder weniger stark von der Idealform der Ellipse (11) abweichen.



## Beziehungen zur Werkstoffdämpfung

Der Kelvin-Körper genügt der Gleichung

$$\sigma'_{ij} = 2 G \varepsilon'_{ij} + 2 \eta \dot{\varepsilon}'_{ij} \quad (12)$$

( $\sigma'_{ij}$  Spannungsdeviator;  $\varepsilon'_{ij}$  Verformungsdeviator).

Der zweite Term in Gl. (12) ist der „dissipative“ Anteil des Spannungsdeviators:

$$(\sigma'_{ij})_d = 2 \eta \dot{\varepsilon}'_{ij}. \quad (13 a)$$

Für den einachsigen Vergleichsspannungszustand folgt aus Gl. (13 a)

$$\sigma_d = 2 \eta (1 + \nu) \dot{\varepsilon} = E (\eta/G) \dot{\varepsilon} \quad (13 b)$$

( $\nu$  Querkontraktionszahl).

Dem Kelvin-Körper liegt die lineare Differentialgleichung

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + c x = P(t) \quad (14)$$

zugrunde. Darin stellt der zweite Term die dissipative Kraft dar, so daß man als dissipative Spannung den Ausdruck

$$\sigma_d = k \dot{x}/F = k(l/F) \dot{\varepsilon} \quad (15)$$

erhält. Der Vergleich mit Gl. (13 b) führt auf:

$$\tau = \eta/G = k/c. \quad (16)$$

Der Dämpfungsfaktor  $k$  ist ausdrückbar durch das natürliche Dämpfungsmaß  $D$ :

$$k = 2(c/\omega) D \quad (17)$$

( $\omega$  Eigenfrequenz des ungedämpften Systems), so daß

Gl. (16) übergeht in

$$\tau = 2 D/\omega. \quad (18)$$

Mit dem Ausdruck (18) erhält man aus Gl. (11) die „Ersatzellipse“ des linearisierten Werkstoffschwingers<sup>2</sup>: (1):

$$(1 + 4 D^2 \lambda^2) \varepsilon^2 - 2 \varepsilon (\sigma/E) + (\sigma/E)^2 - 4 D^2 \lambda^2 \varepsilon_a^2 = 0. \quad (19)$$

In Gl. (19) bedeutet  $\lambda = \Omega/\omega$  die Abstimmung des Systems.

Als Werkstoffdämpfung wird definiert<sup>2</sup>:

$$\vartheta = A_d/A \quad (20)$$

mit  $A_d$  als dissipative Energie je Belastungszyklus, d. h. Flächeninhalt der Hysteresisschleife, und  $A$  als Bezugsarbeit:

$$A_d = \pi / \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \quad (21)$$

$$\text{und} \quad A = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{E} \varepsilon_a = \frac{1}{2} \varepsilon_a^2. \quad (22)$$

In Gl. (21) bedeuten  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die charakteristischen Zahlen der quadratischen Form (19). Das Ergebnis einer Hauptachsentransformation ist:

$$\gamma_1 \gamma_2 = 1/4 D^2 \lambda^2 \varepsilon_a^4, \quad (23)$$

so daß mit Gl. (21) und (22) die Werkstoffdämpfung gemäß Definition (20) zu

$$\vartheta = 4 \pi D \lambda \quad (24)$$

folgt. Dieser Wert stimmt mit dem in <sup>2</sup> entwickelten Ausdruck überein.

<sup>1</sup> H. A. STUART, Die Physik der Hochpolymeren, 4. Band, Springer-Verlag, Berlin 1956.

<sup>2</sup> A. TROOST u. J. BETTEN, Z. Naturforsch. 25 a, 1994 [1970].

## Fließverhalten kompensierter cholesterischer Mischungen

Flow Behaviour of Compensated Cholesteric Liquid-Crystal Mixtures

P. POLLMANN

Iwan N. Stranski-Institut für Physikalische Chemie der Technischen Universität Berlin

(Z. Naturforsch. 27 a, 719—720 [1972]; eingegangen am 27. Januar 1972)

Cholesterische Flüssigkeiten besitzen eine Schraubenstruktur, deren Drehsinn durch die Molekülstruktur des zugrunde liegenden Cholesterinesters bestimmt wird. Wie verschiedene Untersuchungen<sup>1-3</sup> zeigen, kann durch Mischen zweier cholesterischer Komponenten entgegengesetzten Drehsinns eine Kompensation erreicht, d. h. die Verschraubung aufgehoben und somit eine nematische Struktur erzeugt werden.

Sonderdruckanforderungen an Dr. P. POLLMANN, Lehrstuhl II für Physikalische Chemie der Technischen Universität Berlin, D-1000 Berlin 12, Straße des 17. Juni 135.

Die reziproke Ganghöhe der Strukturschraube ist ein Maß für das sogen. „Verdrillungsvermögen“ („twisting power“) des die cholesterische Phase aufbauenden Moleküls<sup>1</sup>. Die Größe sowie die Temperaturabhängigkeit dieses Verdrillungsvermögens ist im allgemeinen bei den einzelnen Cholesterinestern unterschiedlich. Die Nematisierung einer Mischung tritt somit nur bei einer bestimmten Temperatur auf, der sogen. nematischen Temperatur  $T_n$ .  $T_n$  ist durch das Zusammensetzungsverhältnis der Mischung festgelegt. Ober- und unterhalb der nematischen Temperatur überwiegt jeweils das Verdrillungsvermögen einer der beiden Komponenten, so daß sich cholesterische Schraubenstrukturen entgegengesetzten Drehsinns ausbilden.

Cholesterische und nematische Phasen weisen in ihrem Fließverhalten charakteristische Unterschiede auf<sup>4</sup>. Beim Fließen durch eine Kapillare z. B. stellen sich bei nematischen Flüssigkeiten die Moleküllängsachsen in Strömungsrichtung<sup>1a</sup>, bei den cholesterischen senkrecht dazu ein.

Es war deshalb von Interesse, ob die oben erwähnten kompensierten cholesterischen Mischungen bei der nematischen Temperatur eine Änderung ihres Fließverhaltens zeigen würden.